Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse et calcul d'aire (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée des smartphones (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsci.fr/assets/annales/bts-ci/E2 - Mathématiques/2018/BTS CI - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d'un train à très haute vitesse et calcul d'aire

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse instantanée de 400 km/h en moins de deux minutes. L'exercice étudie la distance parcourue par le wagon avec une équation différentielle et l'analyse de fonction, puis calcule l'aire d'une pièce destinée aux gares à partir d'un graphique et d'une intégrale.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

On compare l'équation à la forme $y' + ay = 0$, dont les solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$. Ici, $a = -0,2$, donc $-at = 0,2t$. La constante C est réelle, et les solutions sont définies sur $[0, +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t}, \quad C \in \mathbb{R}$

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On dérive g : $g'(t) = -15$. En substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$. L'égalité étant vérifiée pour tout $t \in [0, 3]$, la fonction proposée est bien une solution de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = -15t - 75$ est une solution de l'équation.

Question 3°. Déduire des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière g l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière toutes les solutions de l'équation homogène. On additionne donc $g(t) = -15t - 75$ et $Ce^{0,2t}$. Le paramètre C parcourt l'ensemble des réels.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t} - 15t - 75, \quad C \in \mathbb{R}$

Question 4°. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

Dans la solution générale, la condition initiale impose $f(0) = C - 75 = 0$, donc $C = 75$. On remplace cette constante dans l'expression générale. La forme factorisée obtenue correspond à celle donnée pour l'étude de fonction dans la partie B.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75 = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions de f et de f' fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le logiciel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, puis à $0,2t \geq 0$, car l'exponentielle est croissante. Sur l'intervalle étudié, cette inégalité est satisfaite partout, avec égalité en $t = 0$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire de l'étude du signe de f' les variations de f sur l'intervalle [0, 3].

Comme $f'(t) \geq 0$ sur tout l'intervalle, f y est croissante. Aux bornes, $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$. Le tableau résume ses variations :

t	**0**	**3**
Signe de f'	$+$, avec $f'(0) = 0$	
Variation de f	0	$16,659$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

f est croissante de 0 à environ $16,659$ sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

Après une minute, la distance parcourue est $f(1)$. En utilisant l'expression de f, on calcule $75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,605$ km. L'arrondi au dixième demandé donne donc une distance de $1,6$ km.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$1,6$ km

Question 3° a). À partir de f'(t), déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes, en kilomètres par minute, et arrondir le résultat au dixième.

La vitesse instantanée est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute. À deux minutes, $f'(2) = 15e^{0,4} - 15 \approx 7,377$ km/min. Arrondie au dixième, cette vitesse vaut $7,4$ km/min.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $7,4$ km/min

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse en tenant compte de la vitesse visée de 400 km/h et du délai de moins de deux minutes.

La vitesse visée équivaut à $400/60 = 20/3$ km/min. On résout $f'(t) = 20/3$: $15(e^{0,2t} - 1) = 20/3$, d'où $t = \ln(13/9)/0,2 \approx 1,839$ minute. Cette vitesse est donc atteinte avant la limite de deux minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : 400 km/h est atteint après environ $1,839$ minute, donc en moins de deux minutes.

Question 4°. Parmi les trois propositions, recopier l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. Avec $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$, le développement donne la troisième proposition. Aucune autre proposition ne correspond à cette équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$

C. Calcul intégral

Question 1°. À l'aide du schéma, choisir parmi les trois propositions l'aire A_1 du rectangle OPQR, en unités d'aire. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Sur le schéma, le rectangle OPQR a une largeur de 3 unités et une hauteur de $2,25$ unités, puisque son bord supérieur est la droite $y = 2,25$. Son aire est le produit de ces dimensions. Parmi les réponses proposées, la valeur correspondante est :

Largeur	Hauteur	Aire
3	2,25	6,75 u. a.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. En exploitant la primitive fournie, calculer l'aire A_2 de la région limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0,3]$, donc l'aire cherchée est $\int_0^3 g(x)\,dx$. La primitive fournie est $\frac{27}{4}\ln(x^2+9)$. En évaluant cette primitive aux bornes, on obtient :

$$A_2 = \frac{27}{4}\big(\ln 18 - \ln 9\big) = \frac{27}{4}\ln 2.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unités d'aire, et arrondir le résultat au millième.

La pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Sur la moitié droite, l'aire hachurée est l'aire du rectangle moins l'aire sous la courbe de g. On double donc la différence entre $A_1 = 6,75$ et $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2$, puis on arrondit au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,143$ u. a.

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée des smartphones

L'exercice étudie deux formes d'obsolescence dans une population de 200 smartphones, puis le nombre de téléphones non réparables parmi des modèles A en panne. Il se termine par un test bilatéral portant sur l'affirmation selon laquelle 55 % des Français pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données de l'énoncé, recopier et compléter le tableau d'effectifs croisant les smartphones touchés ou non par l'obsolescence technique et logicielle, avec les totaux, pour la population de 200 smartphones.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Les effectifs touchés par T et par L sont respectivement 6 et 16. Parmi les 16 smartphones touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T, soit 2 smartphones. Les autres cases se déduisent par différence avec les totaux des lignes, des colonnes et de la population.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Tableau complété : 2 smartphones touchés par T et L, 4 par T seulement, 14 par L seulement et 180 par aucun des deux.

Question 2°. Pour un smartphone prélevé au hasard, donner P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique, L l'obsolescence logicielle et P_L(T) la probabilité de T sachant que L est réalisé.

Les fréquences données dans l'énoncé sont les probabilités de chaque événement pour un smartphone choisi au hasard : 3 % pour l'obsolescence technique et 8 % pour l'obsolescence logicielle. La dernière donnée est déjà conditionnelle : parmi les téléphones touchés par L, 12,5 % sont touchés par T. Il faut donc la noter $P_L(T)$, et non $P(T \cap L)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}030$; $P(L) = 0{,}080$; $P_L(T) = 0{,}125$, soit respectivement les probabilités de T, L et de T sachant L.

Question 3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L) qu'un smartphone soit touché simultanément par l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle.

La probabilité d'être touché simultanément par T et L se calcule à partir de la probabilité de L et de la probabilité conditionnelle de T sachant L : $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. En remplaçant par les données de l'énoncé, on obtient $0,08 \times 0,125 = 0,010$. Cela correspond à 1 % des smartphones de la population étudiée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0,010$: 1 % des smartphones sont touchés simultanément par les deux formes d'obsolescence.

Question 3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L) qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

Pour obtenir la probabilité d'être touché par au moins un type d'obsolescence, on additionne P(T) et P(L). Les smartphones appartenant à l'intersection sont alors comptés deux fois : il faut donc soustraire une fois $P(T \cap L)$. Ainsi, $P(T \cup L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10$. La probabilité cherchée représente 10 % de la population.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0,100$: la probabilité d'être touché par au moins un type d'obsolescence est de 10 %.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité demandée est celle de L parmi les smartphones touchés par T. On utilise donc la formule $P_T(L) = P(T \cap L) / P(T)$. Avec les probabilités calculées précédemment, cela donne $0,01 / 0,03 = 1/3$. Arrondie au millième, cette probabilité vaut 0,333.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = 1/3 \approx 0,333$: environ un smartphone touché par T sur trois est aussi touché par L.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

1. Une épreuve consiste à prélever un smartphone : il est non réparable avec la probabilité 0,045, ou réparable avec la probabilité complémentaire.
2. Le stock étant suffisamment important, les 50 prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise : les épreuves sont indépendantes et ont la même probabilité de succès.

X compte les smartphones non réparables parmi ces 50 épreuves. C'est donc une variable aléatoire binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045, où le succès correspond à un smartphone non réparable.

Question 2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones d'un lot soient tous réparables.

« Tous les smartphones sont réparables » signifie qu'aucun des 50 prélèvements n'est non réparable. Cet événement est donc X = 0. Pour chaque smartphone, la probabilité d'être réparable vaut 1 - 0,045 = 0,955. Par indépendance des prélèvements, la probabilité que les 50 soient réparables est $0{,}955^{50}$, soit environ 0,100 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 0) = 0{,}955^{50} \approx 0{,}100$: la probabilité que les 50 smartphones soient réparables est de 10,0 %.

Question 3° a). Faire tourner l'algorithme à la main et compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et les valeurs successives de S pour i allant de 0 à 3.

À chaque étape, l'algorithme ajoute P(X = i) à la somme S. Les probabilités sont calculées avec la loi binomiale B(50 ; 0,045), puis les sommes successives sont arrondies au millième pour compléter le tableau. La première valeur de S est celle déjà indiquée dans le sujet. Les valeurs suivantes s'obtiennent en ajoutant chaque nouvelle probabilité à la somme précédente.

i	**0**	**1**	**2**	**3**
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(X = i), pour i = 0 à 3 : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Valeurs successives de S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte du nombre de smartphones non réparables.

La boucle additionne les probabilités correspondant à i = 0, 1, 2 et 3. À sa fin, S vaut donc P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = P(X ≤ 3), soit 0,813 au millième. Dans le contexte, cela signifie qu'environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois smartphones non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

S = 0,813 : environ 81,3 % des lots de 50 smartphones contiennent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte d'un lot de 50 smartphones.

Pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est E(X) = np. Ici, E(X) = 50 × 0,045 = 2,25. Il s'agit d'une moyenne théorique : sur un grand nombre de lots de 50 smartphones, le nombre de téléphones non réparables par lot sera en moyenne de 2,25.

✓ RÉPONSE À RETENIR

E(X) = 2,25 : un lot de 50 smartphones contient en moyenne 2,25 smartphones non réparables.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sachant que, sous H_0, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037, choisir parmi les propositions la valeur de h au centième telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Sous H_0, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs s'étend approximativement jusqu'à 1,96 écart-type de la moyenne. Ainsi, h ≈ 1,96 × 0,037 = 0,07252, soit 0,07 au centième. Parmi les trois propositions, la valeur correcte est donc 0,07.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La proposition exacte est h ≈ 0,07 au centième, valeur obtenue en arrondissant 1,96 × 0,037 = 0,07252.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H_0 : p = 0,55 et H_1 : p ≠ 0,55.

Le test est bilatéral au seuil de 5 %. Sous H_0, la zone centrale de 95 % est déterminée par 0,55 ± h, avec h ≈ 0,07 au centième d'après la question précédente. On conserve H_0 si la fréquence observée appartient à cet intervalle d'acceptation ; si elle est en dehors, on rejette H_0 au profit de H_1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si la fréquence observée appartient à [0,48 ; 0,62] ; rejeter H_0 sinon.

Question 3°. À partir des réponses recueillies auprès des 180 personnes, dont 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée, donner la conclusion du test.

La fréquence observée dans l'échantillon est 76 / 180 ≈ 0,422. L'intervalle d'acceptation du test est [0,48 ; 0,62]. Comme 0,422 est inférieur à la borne basse, la fréquence observée se trouve dans la région de rejet. Au seuil de 5 %, on rejette donc H_0 : p = 0,55 ; l'échantillon présente une fréquence plus faible.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fréquence observée vaut 0,422, hors de [0,48 ; 0,62] : on rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2018, code MATGRB1, durée de 2 heures. Le coefficient dépend de la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3. Le sujet porte sur le départ d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence programmée des smartphones. Il évalue équations différentielles, étude de fonction, calcul intégral, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution générale d'une équation différentielle avec second membre est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- Le signe de f' détermine les variations de f ; ici, la vitesse instantanée est la dérivée de la distance par rapport au temps.
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, P(X = k) = C(n,k)p^k(1 - p)^(n-k) et E(X) = np.
- Une aire sous une courbe positive entre a et b se calcule par l'intégrale de la fonction entre a et b.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier les unités : la vitesse calculée est en kilomètres par minute et doit être comparée à 400 km/h.
- Compléter le tableau d'effectifs en contrôlant les totaux des lignes, des colonnes et l'effectif global de 200.
- Distinguer probabilité conjointe et probabilité conditionnelle, en respectant l'événement placé après « sachant que ».
- Pour le test, calculer la fréquence observée, la comparer à l'intervalle de décision et formuler une conclusion dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle avec second membre ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale permet ensuite de déterminer la constante de la solution générale.

Q : Quelle différence y a-t-il entre une probabilité conjointe et une probabilité conditionnelle ?

La probabilité conjointe P(T ∩ L) décrit la réalisation simultanée de deux événements. La probabilité conditionnelle P_L(T) concerne T en sachant que L est réalisé, et se calcule en rapportant P(T ∩ L) à P(L).

Q : Quel est le barème et comment organiser les deux heures ?

Chacun des deux exercices vaut 10 points, soit 20 points au total. Le sujet ne fixe pas de durée par exercice : répartissez le temps entre les questions et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Comment présenter la conclusion du test d'hypothèse ?

Comparez la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation établi au seuil de 5 %. Indiquez si H_0 est rejetée ou non, puis traduisez cette décision par une phrase répondant à la question sur la marque B.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsci.fr/assets/annales/bts-ci/E2 - Mathématiques/2018/BTS CI - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Commerce International : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.