Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du mouvement de fermeture d'un tiroir (12 questions) **Page 3**

2. Développement en série de Fourier d'une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsci.fr/assets/annales/bts-ci/E2 - Mathématiques/2023/BTS CI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du mouvement de fermeture d'un tiroir

La distance entre le fond du tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L'étude mobilise une équation différentielle, l'analyse d'une fonction exponentielle, un algorithme de seuil et le calcul d'une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Le produit est nul si l'un de ses facteurs est nul, donc $r = -1$ ou $r = -4$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, en utilisant le tableau de correspondance fourni.

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. D'après le tableau fourni, la solution générale de l'équation différentielle est une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale négative de -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f représente la distance OM, en centimètres. À l'instant initial, cette distance vaut 20 cm. La dérivée $f'(0)$ représente la vitesse initiale, donnée comme négative et égale à $-10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Question 2.b. En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l'expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression est la distance exacte en centimètres ; sa valeur approchée au centième est $3{,}16$ cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \left(\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}\right)$ cm, soit environ 3,16 cm.

Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si l'affirmation du constructeur, selon laquelle le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, est correcte et justifier.

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}4274$ cm, donc la distance est déjà inférieure à 0,5 cm. De plus, f est strictement décroissante : pour $t \geq 0$, $40e^{-4t} < 70e^{-t}$, donc $f'(t) < 0$. Le seuil a ainsi été franchi avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B

Question 1.a. Sachant que lim e^{-u} = 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Quand $t \to +\infty$, les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers zéro. Les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ tendent donc vers zéro, et leur différence aussi.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. En déduire que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

Comme $f(t)$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$. C'est l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$, et le second donne $-\frac{10}{3} \times (-4)e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Puisque $f'(t) < 0$ sur l'intervalle, f y est strictement décroissante. On a $f(0) = 20$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Recopier le tableau de suivi de l'algorithme, en ajoutant des lignes si nécessaire, et le compléter à partir de la ligne 36 jusqu'à l'arrêt de l'algorithme. Indiquer les valeurs de f(t), arrondies au centième, et le résultat du test à chaque ligne.

Le test porte sur $f(t) > 0{,}5$. L'algorithme augmente t de 0,1 tant que cette condition est vraie. Les valeurs arrondies au centième donnent :

Ligne	t	$f(t)$	**Test** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

✓ RÉPONSE À RETENIR

À la ligne 39 : $t = 3{,}9$, $f(t) = 0{,}47$, test FAUX.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Le test est vrai à $t = 3{,}8$, puis faux à $t = 3{,}9$. L'algorithme s'arrête donc avec cette dernière valeur. Elle correspond au premier dixième de seconde où la distance est inférieure ou égale à 0,5 cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé au bout d'environ 3,9 secondes.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}[F(t)]_0^4$, soit $m = \frac{1}{4}\left(\frac{135}{6} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right)$. En simplifiant, on obtient l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16} \approx 5{,}518 \text{ cm}.$$

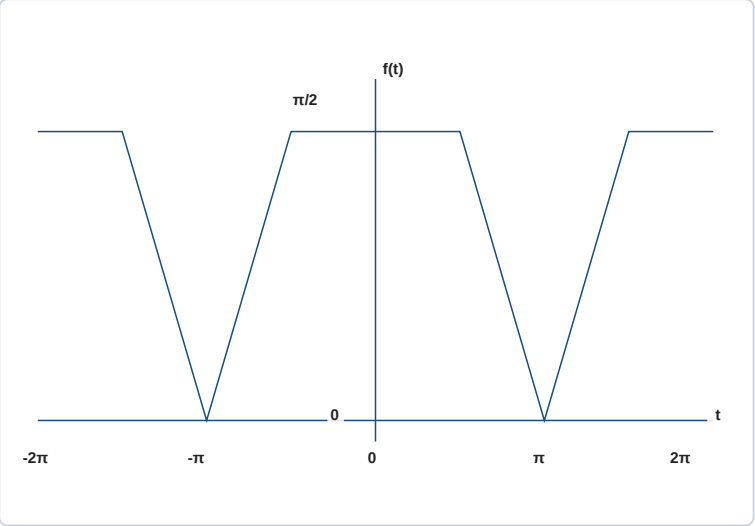
2. Développement en série de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice porte sur une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], et sur son développement en série de Fourier. Il demande de représenter la fonction, de déterminer ses coefficients et d'utiliser une somme partielle pour reconnaître une courbe et estimer l'erreur sur une approximation de la valeur efficace au carré.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux et de sa périodicité.

Sur une période centrée en 0, **f(t)=π/2** pour $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. La fonction rejoint 0 linéairement en $-\pi$ et π. On répète ensuite ce motif tous les 2π, en respectant la parité.

Représentation de f sur [-2π, 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé périodique de période 2π sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient b_n est nul.

La fonction f est paire et $\sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair. On peut calculer le coefficient sur la période symétrique $[-\pi, \pi]$, ce qui ne change pas l'intégrale sur une période. L'intégrale d'une fonction impaire sur cet intervalle est nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. On note ω la pulsation associée à la fonction f. Déterminer ω.

La pulsation associée à une période T vaut $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ici, $T = 2\pi$, donc $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant a_0 vaut $3\pi/8$.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. Par périodicité et parité, cette intégrale vaut deux fois celle sur $[0, \pi]$. Sur cet intervalle, l'aire est la somme d'un rectangle et d'un triangle : $\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}$. Ainsi, $a_0 = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8})$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{(\pi/2)} \cos(nt)dt + (2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)dt$.

Comme f est paire, le formulaire donne $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale en $[0, \pi/2]$ et $[\pi/2, \pi]$, où les expressions de f sont respectivement $\pi/2$ et $\pi - t$. Le premier terme devient $\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt$, ce qui donne la formule demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

Dans la formule admise, les différences de cosinus pour $n = 1, 2, 3$ valent respectivement $1, -2, 1$. En remplaçant chaque valeur de n, on obtient :

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. **En déduire l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ de la série de Fourier.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, car tous les coefficients b_n sont nuls. En y substituant les coefficients obtenus, on trouve :

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer sans justification laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

La courbe correspondant à la somme partielle s_3 est la courbe numéro 3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 3.

Question 9.a. **On note P = $(a_0)^2$ + 1/2[$(a_1)^2$ + $(a_2)^2$ + $(a_3)^2$]. Donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

En utilisant les coefficients calculés, on obtient $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **On note F la valeur efficace de f. Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

L'erreur relative vaut $100 \times \frac{|P - F^2|}{F^2}$, avec $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$. Elle est d'environ $0{,}0739\%$, ce qui correspond au choix proposé de $0{,}1\%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pourcentage d'erreur à choisir : $0{,}1\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices de 10 points étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis les séries de Fourier d'une fonction paire, ses coefficients et une approximation de valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La fermeture du tiroir est modélisée par $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, avec f en centimètres et t en secondes.
- Pour une fonction de période T, $\omega = 2\pi/T$; si la fonction est paire, ses coefficients sinus b_n sont nuls.
- Pour une fonction paire, $a_n = (4/T)\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour $n \geq 1$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance f(t), exprimée en centimètres, de sa dérivée f'(t), qui représente la vitesse.
- Pour conclure sur le seuil de fermeture, vérifier la condition stricte OM < 0,5 cm et interpréter le temps obtenu.
- Dans l'algorithme, recalculer le test après chaque incrément de t et poursuivre jusqu'à ce que la condition soit fausse.
- Pour les séries de Fourier, respecter la période, la parité et les coefficients fournis avant de comparer la somme partielle aux courbes.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle associée au mouvement du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines déterminent la forme générale des solutions de l'équation différentielle, puis les conditions initiales permettent de fixer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients sinus de Fourier sont-ils nuls ici ?

La fonction étudiée est paire. Le produit de cette fonction par sin(nωt), qui est impair, est impair ; son intégrale sur une période symétrique est nulle. On obtient donc $b_n = 0$.

Q : Comment savoir quand arrêter le tableau de l'algorithme ?

On teste la condition f(t) > 0,5 à chaque étape. Si elle est vraie, l'algorithme augmente t de 0,1 ; il s'arrête dès qu'elle devient fausse. Il faut alors interpréter la valeur finale de t comme un seuil de fermeture.

Q : Les questions de l'épreuve ont-elles toutes le même coefficient ou le même barème ?

Le sujet attribue 10 points à chacun des deux exercices. Le coefficient officiel dépend de la spécialité : 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsci.fr/assets/annales/bts-ci/E2 - Mathématiques/2023/BTS CI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Commerce International : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.